

## Управление в технических системах

© 2025 г. А.С. АРХИПОВА (alsearkhipova@sberbank.ru)

(Центр робототехники, ПАО Сбербанк, Москва),

В.С. ВЯЗЬМИН, канд. физ.-мат. наук (vadim.vyazmin@math.msu.ru)  
(Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова)

### ФИЛЬТР КАЛМАНА В ЗАДАЧЕ БЕСКАРДАННОЙ АЭРОГРАВИМЕТРИИ С УЧЕТОМ УТОЧНЕННОЙ МОДЕЛИ ПОГРЕШНОСТЕЙ СПУТНИКОВЫХ ДАННЫХ

Рассматривается задача определения аномалии силы тяжести на траектории летательного аппарата по измерениям бескарданного аэрогравиметра, включающим измерения инерциальных датчиков и приемников глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС). Задача сводится к оптимальному стохастическому оцениванию при заданных априорных моделях аномалии силы тяжести, погрешностей измерений датчиков и данных ГНСС (ускорений летательного аппарата, вычисленных по первичным фазовым измерениям приемников). Алгоритмом решения задачи является фильтр Калмана. Показано, что для повышения точности оценивания аномалии необходимо использовать уточненную модель погрешности ускорений ГНСС, задаваемую во времени в виде второй разности дискретного белого шума, вместо традиционно применяемой в аэрогравиметрии модели погрешности ускорений в виде белого шума.

*Ключевые слова:* аэрогравиметрия, бескарданный гравиметр, погрешности ГНСС, оптимальное оценивание, фильтр Калмана.

**DOI:** 10.31857/S0005231025060055, **EDN:** IKCSKT

#### 1. Введение

Рассматривается задача аэрогравиметрии, состоящая в определении гравитационной аномалии (аномалии силы тяжести) по измерениям бескарданного аэрогравиметра на траектории летательного аппарата (самолета, вертолета, беспилотного аппарата). Под аномалией понимают разность проекций на географическую вертикаль векторов реальной силы тяжести и нормальной силы тяжести, рассчитываемой для модели Земли в виде эллипсоида вращения [1].

Приборную основу бескарданного аэрогравиметра составляют бескарданная инерциальная навигационная система (БИНС), включающая блок высокоточных инерциальных датчиков (три акселерометра, три датчика угловой скорости – гироскопа), и приемники сигналов глобальной навигационной спутниковой системы (ГНСС) – бортовой и наземные базовые. Дополняют

аэрогравиметр комплекс алгоритмов постобработки измерений инерциальных датчиков и приемников ГНСС, которые включают решение следующих задач [2] (см. также, например, [3–5]):

- 1) задача спутниковой навигации (определение координат, скорости, ускорений летательного аппарата по первичным измерениям приемников ГНСС);
- 2) задача интегрированной инерциально-спутниковой навигации (определение оценок углов ориентации корпуса БИНС, инструментальных погрешностей инерциальных датчиков – смещений нулей акселерометров и дрейфов гироскопов и пр.);
- 3) гравиметрическая задача (определение аномалии силы тяжести).

Особенностью первого этапа постобработки является построение спутниковых навигационных решений по первичным – кодовым, доплеровским, фазовым – измерениям многочастотных приемников одной или нескольких систем (GPS, ГЛОНАСС, BeiDou, GALILEO и др.) [4, 5]. При решении данной задачи используется дифференциальный режим обработки для уменьшения уровня погрешностей, вызванных влиянием ионосферы, тропосферы. Иногда вместо дифференциального режима применяется технология обработки Precise point positioning (PPP), не требующая привлечения базовых станций [6]. Наибольшее внимание при решении задачи спутниковой навигации уделяется вычислению скорости и/или ускорений носителя, для чего используются фазовые измерения и, реже, доплеровские (см., например, [5, 7]). В некоторых алгоритмах ГНСС используются оба типа измерений, при этом доплеровские измерения служат в качестве вспомогательных, привлекаемых при сбоях в фазовых измерениях [4].

На втором этапе постобработки (задача интеграции БИНС-ГНСС) уточняется ориентация корпуса БИНС аэрогравиметра на основе первичных измерений инерциальных датчиков (акселерометров, гироскопов) и построенных спутниковых решений. Математическую основу задачи составляют уравнения ошибок БИНС, записываемые в проекциях на оси опорной (географической) системы координат (см., например, раздел 5.2 в [1]). При этом из уравнений исключают вертикальный канал, что приводит к исключению аномалии силы тяжести (как неизвестной величины) из состава фазового вектора. Влиянием аномалии на горизонтальные каналы, выражающимся в виде ее произведения на угловые ошибки определения вертикали, пренебрегают как величиной второго порядка малости. Далее ставится и решается задача оптимального стохастического оценивания (алгоритм решения – фильтр Калмана), в результате чего определяется оценка фазового вектора на траектории полета летательного аппарата. А именно, определяются оценки угловых ошибок ориентации БИНС, инструментальных погрешностей инерциальных датчиков и др. (подробнее см. в [2]).

В работе рассматривается последний (третий) этап постобработки – решение гравиметрической задачи (определение аномалии), для чего используется рассогласование измерений в вертикальном канале БИНС с данными

ГНСС. Задача формулируется как задача оптимального стохастического оценивания при заданной априорной стохастической модели аномалии и моделях погрешностей измерений инерциальных датчиков и погрешностей данных ГНСС (ускорений летательного аппарата). Решение задачи сводится к фильтру Калмана. Для погрешностей ускорений ГНСС при этом традиционно вводится модель во времени в виде белого шума [8, 9]. Однако в действительности погрешности имеют более сложную структуру и, в частности, коррелированы во времени.

В настоящей работе при постановке задачи оценивания аномалии вводится (насколько известно, впервые) уточненная модель погрешности ускорений ГНСС, учитывающая специфику метода вычисления ускорений по первичным фазовым измерениям (доплеровские измерения в работе не рассматриваются). А именно, предполагается, что ускорения вычислены на основе двойных разностей фазовых измерений ГНСС (по трем последовательным эпохам) [10]. Уточненная модель погрешности ускорений задается в работе формирующим уравнением во времени в виде второй центральной разности дискретного белого шума. Задача аэрогравиметрии сведена к стандартной линейной задаче оптимального стохастического оценивания и фильтру Калмана. Приведены результаты проверки предложенного подхода на данных реальной аэрогравиметрической съемки, демонстрирующие более высокую точность определения аномалии по сравнению с традиционным подходом на основе упрощенной модели погрешности ускорений ГНСС.

## 2. Математическая модель

### 2.1. Опорные уравнения

Введем необходимые обозначения:

- $M$  – приведенная чувствительная масса блока акселерометров БИНС аэрогравиметра;
- $Mx$  – географическая система координат с центром в точке  $M$  и направлениями осей на восток, север и вверх по нормали к общеземному эллипсоиду (соответствующие обозначения –  $E, N, Up$ ) [1];
- $Mz$  – приборная система координат, жестко связанная с БИНС; оси  $z_1, z_2, z_3$  взаимно перпендикулярны и в данной работе предполагаются сонаправленными с осями чувствительности акселерометров БИНС.

Математическую основу задачи бескарданной аэрогравиметрии составляет уравнение движения точки  $M$ , записываемое в проекциях на оси географического трехгранника  $Mx$  (формы записи для других вариантов опорного трехгранника обсуждаются, например, в [1]):

$$(1) \quad \mathbf{a}_x = -(\boldsymbol{\Omega}_x + 2\mathbf{u}_x) \times \mathbf{v}_x + \mathbf{g}_x^0 + \Delta\mathbf{g}_x + L_{zx}^T \mathbf{f}_z,$$

где  $\mathbf{v}_x, \mathbf{a}_x$  – векторы скорости и ускорения (относительно Земли) точки  $M$  в проекциях на оси  $Mx$ ;  $\boldsymbol{\Omega}_x, \mathbf{u}_x$  – векторы угловой скорости  $Mx$  относительно

Земли и угловой скорости Земли относительно инерциального пространства соответственно;  $\mathbf{g}_x^0 = (0, 0, -g_0)^T$  – вектор нормальной силы тяжести в точке  $M$  [11],  $\Delta\mathbf{g}_x$  – вектор возмущения силы тяжести [1],  $\mathbf{f}_z$  – вектор удельной силы реакции, действующей на точку  $M$  со стороны корпуса БИНС, в проекциях на оси  $Mz$ ;  $L_{zx}$  – ортогональная матрица ориентации приборного трехгранника  $Mz$  относительно  $Mx$ .

Перейдем от векторного уравнения (1) к скалярному – его проекции на географическую вертикаль (основное уравнение скалярной аэрогравиметрии):

$$(2) \quad a_{up} = g_{etv} - g_0 - \Delta g + L_3^T \mathbf{f}_z,$$

где  $a_{up}$  – относительное вертикальное ускорение точки  $M$ ,  $g_{etv}$  – поправка Этвеша (вертикальная проекция удельных сил инерции),  $g_0$  – абсолютное значение нормальной силы тяжести в точке  $M$ ,  $\Delta g$  – отрицательная вертикальная проекция вектора  $\Delta\mathbf{g}_x$  (аномалия силы тяжести),  $L_3$  – третий столбец матрицы ориентации  $L_{zx}$ .

Гравиметрическая задача, как было отмечено выше, решается на последнем этапе постобработки данных аэрогравиметра и состоит в определении аномалии  $\Delta g$  на траектории полета из (2) по измерениям акселерометров БИНС, спутниковым решениям (координатам, скоростям, ускорениям летательного аппарата) и инерциально-спутниковым решениям (оценкам углов ориентации корпуса БИНС аэрогравиметра).

## 2.2. Модели измерений

Среди переменных, входящих в (2), напрямую измеряются только проекции удельной силы реакции  $\mathbf{f}_z$  (при помощи акселерометров БИНС). Введем модель их измерений в виде

$$(3) \quad \mathbf{f}'_z = \mathbf{f}_z + \mathbf{q}_f,$$

где  $\mathbf{f}'_z$  – вектор, составленный из измерений трех акселерометров,  $\mathbf{q}_f$  – вектор погрешностей измерений.

Вертикальное ускорение летательного аппарата определяется по первичным (в данной работе – фазовым) измерениям ГНСС и может быть представлено в виде

$$(4) \quad a_{up}^{gps} = a_{up} + e_a,$$

где  $a_{up}^{gps}$  – вертикальное ускорение, вычисленное по ГНСС,  $e_a$  – погрешность.

Поправка Этвеша  $g_{etv}$  определяется на основе известного соотношения по координатам и восточной и северной проекциям относительной скорости точки  $M$  [1]. Абсолютное значение нормальной силы тяжести  $g_0$  определяется на основе той или иной теоретической модели (формула Гельмерта, формула Сомильяны или др.) и координатам точки  $M$  [11]. При вычислении поправки Этвеша и абсолютного значения нормальной силы тяжести в аэрогравиметрии используются данные ГНСС (погрешностями данных пренебрегают) [4].

Также предполагается известной оценка  $\tilde{L}_3$  вектор-столбца  $L_3$ , вычисляемая по оценкам углов ориентации (курс, крен, тангаж) корпуса БИНС [12].

Обозначим через  $a'_{up}$  модельное вертикальное ускорение, определяемое по указанным данным в виде

$$(5) \quad a'_{up} = g_{etv} - g_0 + \tilde{L}_3^T \mathbf{f}'_z.$$

### 2.3. Основное уравнение аэрогравиметрии в измерениях

Введем отклонение модельного вертикального ускорения от истинного:  $\Delta a_{up} = a_{up} - a'_{up}$ , для которого верно представление, получаемое из (2) и (5):

$$(6) \quad \Delta a_{up} = -\Delta g + L_3^T \mathbf{f}_z - \tilde{L}_3^T \mathbf{f}'_z.$$

Введем обозначение  $\tilde{L}_{zx}$  для оценки матрицы ориентации БИНС, определяемой из решения задачи инерциально-спутниковой навигации (второй этап постобработки). Напомним, что на указанном этапе оцениваются угловые ошибки ориентации, которые далее используются для поправки (уточнения) расчетных значений углов курса, крена, тангажа БИНС, полученных по инерциальным данным. Таким образом, введенная матрица  $\tilde{L}_{zx}$  предполагается вычисленной по уточненным оценкам углов ориентации БИНС и является ортогональной.

Будем считать, что истинная матрица ориентации  $L_{zx}$  и матрица  $\tilde{L}_{zx}$  связаны соотношением

$$L_{zx} = (I + \hat{\kappa}) \tilde{L}_{zx},$$

где  $\hat{\kappa}$  – кососимметрическая матрица, составленная из компонент вектора малого поворота  $\kappa = (k_E, k_N, k_{Up})^T$ . Вектор  $\kappa$  характеризует погрешности оценок угловых ошибок ориентации, полученных на этапе интеграции БИНС-ГНСС. Здесь  $k_E, k_N$  – погрешности оценок угловых ошибок определения вертикали в восточном и северном направлениях соответственно,  $k_{Up}$  – погрешность оценки азимутальной ошибки.

Тогда выражение в правой части (6) можно переписать, используя (3), в виде

$$(7) \quad L_3^T \mathbf{f}_z - \tilde{L}_3^T \mathbf{f}'_z = (L_3^T - \tilde{L}_3^T) \mathbf{f}'_z - \tilde{L}_3^T \mathbf{q}_f = -k_E f'_N + k_N f'_E - \tilde{L}_3^T \mathbf{q}_f,$$

где  $f'_E = \tilde{L}_1^T \mathbf{f}'_z$ ,  $f'_N = \tilde{L}_2^T \mathbf{f}'_z$  – проекции измеренной удельной силы реакции в восточном и северном направлениях соответственно,  $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2$  – первые два столбца матрицы ориентации  $\tilde{L}_{zx}$ .

С другой стороны, используя ускорение, вычисленное по данным ГНСС (4), можно сформировать измерение отклонения вертикального ускорения  $\Delta a_{up}$  в виде

$$(8) \quad y := a_{up}^{gps} - a'_{up} = \Delta a_{up} + e_a,$$

где  $e_a$  – погрешность ускорения, вычисленного по данным ГНСС.

Подставляя в (8) выражения (7) и (6), получим итоговую модель задачи аэрогравиметрии, включающую измерения и их погрешности:

$$(9) \quad y = -\Delta g - k_E f'_N + k_N f'_E - \tilde{L}_3^T \mathbf{q}_f + e_a.$$

Отметим, что в (9) могут быть включены также другие погрешности, а именно погрешность из-за смещения антенны бортового приемника ГНСС от БИНС и погрешности синхронизации данных БИНС и ГНСС [2]. В данной работе указанные погрешности для простоты изложения не учитываются.

Уравнение (9) будем рассматривать на интервале времени полета  $[t_0, t_n]$ . Будем предполагать, что все измерения  $y, f'_E, f'_N, \tilde{L}_3$  приведены к одной частоте (к частоте данных ГНСС). Пусть  $t_i$  – моменты времени, в которые заданы измерения ( $i = 0, \dots, n$ ),  $\Delta t$  – шаг между двумя соседними моментами (шаг времени данных ГНСС). Остальные переменные в (9) –  $\Delta g, k_E, k_N, \mathbf{q}_f, e_a$  – предполагаются неизвестными функциями времени, для которых ниже вводятся априорные модели.

### 3. Формулировка задачи оптимального оценивания

Сведем (9) к задаче оптимального стохастического оценивания. Введем априорные стохастические модели аномалии  $\Delta g$ , систематических погрешностей  $k_E, k_N$  и погрешностей ускорений ГНСС  $e_a$ . Погрешности измерений акселерометров  $\mathbf{q}_f$  будем считать векторным случайным процессом (в дискретном времени), компонентами которого являются белые шумы с нулевым средним и заданной дисперсией  $\sigma_f^2$  (все три акселерометра БИНС аэрогравиметра предполагаются равнозначными).

#### 3.1. Стохастические модели аномалии и систематических погрешностей

В аэрогравиметрии основной гипотезой об аномалии (как функции от времени полета) является ее низкочастотный характер [13]. В соответствии с этим выбирается и априорная стохастическая модель в предположении, что аномалия является стационарным случайным процессом во времени. Наиболее часто используемыми в алгоритмах аэрогравиметрии моделями аномалии являются марковские модели (чаще всего второго или третьего порядков) [14, 15], модели в виде интегралов от белого шума [3, 4, 13], модель Джордана [16]. Кроме того, иногда используются детерминированные пространственные модели [17, 18]. Сравнение перечисленных моделей аномалии весьма трудоемко и выходит за рамки данной статьи. Отдельные модели сравнивались, например, в [1] (раздел 5.2), а также в [14, 15, 17, 18]. В частности, в [15] отмечается, что применение в алгоритмах аэрогравиметрии марковских моделей разных порядков и моделей в виде интегралов от белого шума дает примерно одинаковые результаты.

В данной работе выбрана модель аномалии в виде второго интеграла от белого шума. Модель позволяет учесть априорную информацию о низкочастотном характере аномалии, хорошо соответствует реальным гравиметрическим данным во многих районах Земли [13], задается простым формирующим уравнением во времени:  $\Delta\ddot{g} = q_g$ . Спектральная плотность мощности (СПМ) модели имеет вид

$$(10) \quad S_g(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi\omega^4},$$

где  $\omega$  – частота,  $\sigma^2$  – интенсивность белого шума.

Запишем формирующие уравнения модели в дискретном времени, обозначая нижним индексом  $i$  значение в момент времени  $t_i$ :

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta g_{i+1} = \Delta g_i + \Delta t p_i, \\ p_{i+1} = p_i + q_{g,i}, \end{cases}$$

где  $q_{g,i}$  – дискретный белый шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_g^2$ .

Введем стохастические модели систематических погрешностей  $k_E, k_N$ , представляющих собой остаточные угловые ошибки определения вертикали (более точно, погрешности оценок угловых ошибок определения вертикали). Напомним, что оценки угловых ошибок определяются на этапе интеграции БИНС-ГНСС. Оценки угловых ошибок вертикали содержат шулеровскую составляющую [12] и по абсолютной величине, как правило, не превосходят 0,5 угл. минут при измерениях с современными бескарданными аэрогравиметрами [2]. Остаточные угловые ошибки  $k_E, k_N$  по абсолютной величине обычно не превосходят 10 угл. секунд, не содержат шулеровскую составляющую и могут быть описаны как медленные функции времени полета [2, 4].

На основе сказанного введем модели  $k_E, k_N$  в виде интегралов от белого шума:  $\dot{k}_E = q_E, \dot{k}_N = q_N$ , или в дискретном времени:

$$(12) \quad \begin{cases} k_{E,i+1} = k_{E,i} + q_{E,i}, \\ k_{N,i+1} = k_{N,i} + q_{N,i}, \end{cases}$$

где  $q_{E,i}, q_{N,i}$  – дискретные белые шумы с нулевым средним и дисперсиями  $\sigma_E^2, \sigma_N^2$  соответственно.

### 3.2. Уточненная модель погрешностей ускорений ГНСС

Традиционно в алгоритмах аэрогравиметрии погрешность вертикального ускорения, вычисленного по данным ГНСС, предполагается белым шумом. В данной работе вводится уточненная стохастическая модель погрешности, учитывающая специфику метода вычисления ускорений. А именно, предполагается, что ускорения вычислены на основе численного дифференцирования фазовых измерений ГНСС (путем составления двойных разностей изме-

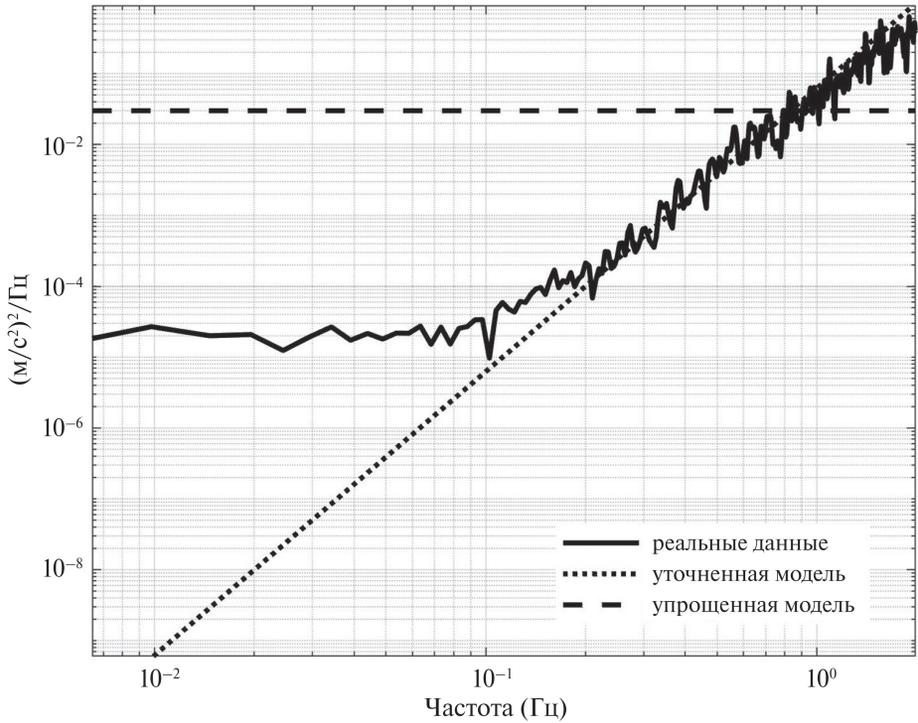


Рис. 1. Спектральная плотность мощности погрешностей ускорений, вычисленных по реальным данным ГНСС (сплошная линия), и ее теоретические модели – уточненная (линия из точек) и традиционная упрощенная (пунктирная линия),  $(\text{м}^2/\text{с}^4)/\text{Гц}$ .

рений по трем последовательным эпохам  $t_{i-1}, t_i, t_{i+1}$  [10]. С учетом сказанного введем уточненную модель погрешности ускорений ГНСС в виде

$$(13) \quad e_{a,i} = \frac{q_{a,i+1} - 2q_{a,i} + q_{a,i-1}}{\Delta t^2},$$

где  $q_{a,i}$  – дискретный белый шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_a^2$ .

Корреляционная функция процесса  $e_{a,i}$ , которую обозначим через  $K_e(m)$  ( $m$  – целое), принимает значения

$$K_e(0) = \frac{6\sigma_a^2}{\Delta t^4}, \quad K_e(\pm 1) = -\frac{4\sigma_a^2}{\Delta t^4}, \quad K_e(\pm 2) = \frac{\sigma_a^2}{\Delta t^4}$$

и ноль при других  $m$ .

СПМ процесса  $e_{a,i}$  определяется выражением (полагая для простоты  $\Delta t = 1$ ):

$$(14) \quad S_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_e(m) e^{-j\omega m} = \frac{2\sigma_a^2}{\pi} (1 - \cos \omega)^2,$$

где  $j$  – мнимая единица.

На рис. 1 представлены графики СПМ уточненной модели погрешности (13)–(14) и реальной погрешности ускорений, рассчитанной методом Уэлча по записи в статическом эксперименте (использовался приемник JAVAD с частотой регистрации 10 Гц и фазовые измерения GPS). Запись сделана на стоянке самолета в аэропорту базирования в ходе выполнения аэрогравиметрической съемки (подробнее в разделе 4). Обработка записи (вычисление ускорений) выполнена программным обеспечением МГУ им. М.В. Ломоносова [10]. Поскольку СПМ уточненной модели (14) пропорциональна  $\omega^4$  при малых значениях частоты, ее график в логарифмическом масштабе отображен на рис. 1 в виде прямой.

На рис. 1 также представлена СПМ упрощенной модели погрешности ускорений ГНСС, традиционно применяемой в алгоритмах аэрогравиметрии (белый шум). Из рис. 1 следует, что уточненная модель значительно лучше соответствует реальным данным как в области высоких частот, так и вблизи частоты среза гравиметрического фильтра [1] – в диапазоне 0,01–0,1 Гц (отличия значений – на два порядка, в то время как традиционная модель превышает СПМ реальных данных на пять–шесть порядков).

Для удобства работы с введенной моделью (13) в дальнейшем потребуется ее запись в пространстве состояний. Введем вспомогательные переменные  $\xi_i, \eta_i$ :

$$(15) \quad \begin{cases} \eta_{i+1} = \xi_i, \\ \xi_{i+1} = q_{\xi,i}, \end{cases}$$

где переобозначено  $q_{\xi,i} := q_{a,i+1}$ . Перепишем модель (13) в новых переменных:

$$(16) \quad e_{a,i} = \frac{\eta_i - 2\xi_i + q_{\xi,i}}{\Delta t^2}.$$

### 3.3. Постановка задачи оценивания и алгоритм решения

Объединим уравнение аэрогравиметрии (9) и введенные выше стохастические модели аномалии (11), остаточных угловых ошибок определения вертикали (12) и уточненной модели погрешности ускорений ГНСС (15)–(16) в одну систему в пространстве состояний:

$$(17) \quad \begin{cases} k_{E,i+1} = k_{E,i} + q_{E,i}, \\ k_{N,i+1} = k_{N,i} + q_{N,i}, \\ \Delta g_{i+1} = \Delta g_i + \Delta t p_i, \\ p_{i+1} = p_i + q_{g,i}, \\ \eta_{i+1} = \xi_i, \\ \xi_{i+1} = q_{\xi,i}, \\ y_i = -\Delta g_i - k_{E,i} f'_{N,i} + k_{N,i} f'_{E,i} + \frac{1}{\Delta t^2} (\eta_i - 2\xi_i + q_{\xi,i}) - \tilde{L}_{3,i}^T \mathbf{q}_{f,i}. \end{cases}$$

Данная система уравнений может быть записана в матричном виде:

$$(18) \quad \begin{cases} \mathbf{x}_{i+1} = A_i \mathbf{x}_i + B_i \mathbf{q}_i, \\ y_i = C_i \mathbf{x}_i + r_i, \end{cases}$$

где вектор неизвестных  $\mathbf{x}_i$  имеет вид

$$(19) \quad \mathbf{x}_i = (k_{E,i}, k_{N,i}, \Delta g_i, p_i, \eta_i, \xi_i)^T \in \mathbb{R}^6.$$

Через  $\mathbf{q}_i$  обозначен вектор шумов в уравнениях динамики

$$(20) \quad \mathbf{q}_i = (q_{E,i}, q_{N,i}, q_{g,i}, q_{\xi,i})^T \in \mathbb{R}^4,$$

через  $r_i$  – шум в измерениях:

$$(21) \quad r_i = \frac{1}{\Delta t^2} q_{\xi,i} - \tilde{L}_{3,i}^T \mathbf{q}_{f,i}.$$

Матрицы  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  в (18) состоят из коэффициентов при неизвестных и шумах в уравнениях динамики (17) и имеют размерности  $6 \times 6$ ,  $6 \times 4$  и  $1 \times 6$  соответственно.

Матрица ковариаций векторного процесса (20)  $E[\mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T]$  имеет размерность  $4 \times 4$ , является диагональной и полностью определена дисперсиями компонент  $\mathbf{q}_i$  (белые шумы), введенными ранее. Дисперсия шума в измерениях  $r_i$  (белый шум) легко вычисляется по (21) и определяется выражением

$$E[r_i^2] = \frac{\sigma_\xi^2}{\Delta t^4} + \sigma_f^2,$$

где учтено, что  $\tilde{L}_{3,i}$  – столбец ортогональной матрицы.

Процессы  $r_i$  и  $\mathbf{q}_i$  коррелированы, матрица взаимной ковариации имеет вид

$$E[r_i \mathbf{q}_i^T] = \frac{1}{\Delta t^2} (0, 0, 0, \sigma_\xi^2).$$

При сделанных предположениях для системы (18) может быть поставлена задача нахождения оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки вектора  $\mathbf{x}_i$  в каждый момент времени по всем доступным измерениям  $y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . В начальный момент времени оценку вектора  $\mathbf{x}_0$  считаем равной 0, а начальную матрицу ковариаций  $E[\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T]$  заданной. Алгоритм решения – фильтр Калмана со сглаживанием [13].

### 3.4. Теоретический анализ точности оценивания аномалии

Определим точность оценивания аномалии в предложенном подходе. Найдем приближенное выражение передаточной функции линейного оптимального фильтра от измерений  $y$  (9) к оценке аномалии (так называемый гравиметрический фильтр). Для этого приведем уравнение (9) к стационарному виду, пренебрегая в нем систематическими погрешностями  $k_E$ ,  $k_N$  и шумами измерений акселерометров  $\mathbf{q}_f$ . Аномалия  $\Delta g$  и погрешность ускорений ГНСС  $e_a$

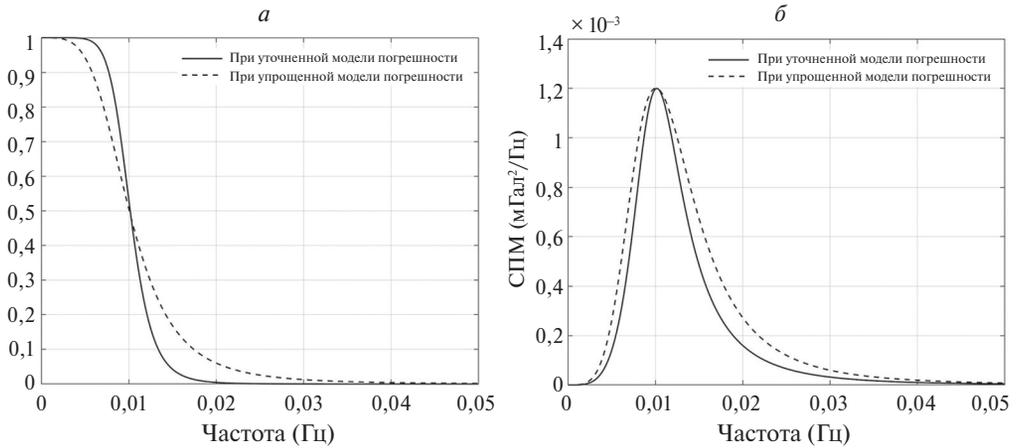


Рис. 2. *а* – Передаточные функции гравиметрических фильтров в новом подходе (с уточненной моделью погрешности ускорений ГНСС) и в стандартном подходе (с упрощенной моделью погрешности). *б* – Спектральные плотности мощности ошибок оценивания аномалии указанными фильтрами, мГал<sup>2</sup>/Гц (1 мГал = 10<sup>-5</sup> м/с<sup>2</sup>).

в данном разделе предполагаются стационарными процессами в непрерывном времени с заданными СПМ (10) и (14) соответственно. Тогда оптимальная в среднеквадратическом смысле линейная оценка аномалии определяется сглаживающим фильтром с передаточной функцией (фильтр Винера) [19]

$$(22) \quad W_1(\omega) = S_g(\omega) (S_g(\omega) + S_e(\omega))^{-1} = \left( 1 + \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_g} \right)^2 \omega^8 \right)^{-1}.$$

При выводе (22) использовано приближение (14) в виде  $\frac{\sigma_a^2}{2\pi} \omega^4$  при малых  $\omega$ .

Таким образом, передаточная функция гравиметрического фильтра, основанного на уточненной модели погрешности ускорений ГНСС (14), приближенно соответствует сглаживателю Баттерворта 4-го порядка (рис. 2, *а*). Также на рис. 2, *а* изображена передаточная функция гравиметрического фильтра  $W_2(\omega)$ , построенного при использовании упрощенной модели погрешности ускорений ГНСС (белый шум с интенсивностью  $\sigma_q^2$ ) и тех же предположениях об аномалии:

$$(23) \quad W_2(\omega) = \left( 1 + \left( \frac{\sigma_q}{\sigma_g} \right)^2 \omega^4 \right)^{-1}.$$

Передаточная функция фильтра (23) соответствует сглаживателю Баттерворта 2-го порядка.

Определим точность оценивания аномалии построенными фильтрами как СПМ ошибки оценки при условии, что истинная СПМ аномалии совпадает с априорной моделью (10), а истинная СПМ погрешности ускорений ГНСС совпадает с моделью (14). Тогда СПМ ошибки оценки аномалии, полученной

при помощи гравиметрического фильтра  $W_1(\omega)$ , будет определяться выражением

$$(24) \quad S_{\delta g}(\omega) = S_g(\omega)S_e(\omega) (S_g(\omega) + S_e(\omega))^{-1} = \frac{\sigma_a^2\omega^4}{2\pi} \left( 1 + \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_g} \right)^2 \omega^8 \right)^{-1}.$$

СПМ ошибки оценки аномалии, полученной при помощи гравиметрического фильтра  $W_2(\omega)$ , определяется следующим выражением:

$$(25) \quad \begin{aligned} S_{\delta g}(\omega) &= |1 - W_2(\omega)|^2 S_g(\omega) + |W_2(\omega)|^2 S_e(\omega) = \\ &= \frac{\sigma_a^2\omega^4}{2\pi} \left( 1 + \frac{\sigma_q^4}{\sigma_g^2\sigma_a^2} \right) \left( 1 + \left( \frac{\sigma_q}{\sigma_g} \right)^2 \omega^4 \right)^{-2}. \end{aligned}$$

Графики СПМ (24)–(25) изображены на рис. 2,б. Из рисунка видно, что при использовании фильтра на основе уточненной модели погрешности ускорений ГНСС СПМ ошибки оценки аномалии меньше, чем при использовании фильтра, основанного на упрощенной модели погрешности ускорений.

#### 4. Численные результаты

Для проверки разработанного алгоритма оценивания аномалии силы тяжести (раздел 3.3) были использованы данные бескарданного аэрогравиметра iCORUS производства iMAR, записанные 17.12.2022 г. в ходе полета аэрогравиметрической съемки по десяти повторным галсам. Направления галсов – запад-восток/восток-запад, длина каждого галса – около 110 км (рис. 3). Полет выполнен на самолете Cessna 208В на постоянной высоте 760 м над референц-эллипсоидом. Средняя скорость самолета на галсах – 70 м/с, длительность полета – 7 ч. Съемка проведена компанией ГНПП «Аэрогеофизика» (Москва) в Красноярском крае.

Первичные данные аэрогравиметра включали измерения инерциальных датчиков БИНС (на частоте 400 Гц) и измерения бортового и наземного

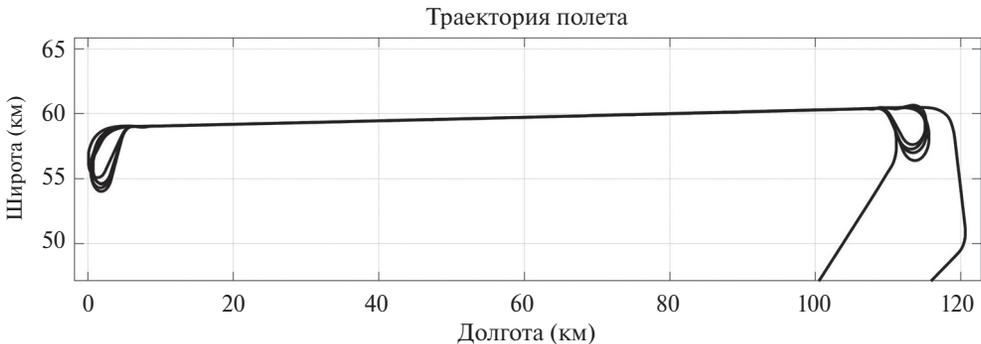


Рис. 3. Траектория самолета на плоскости долгота–широта (данные ГНСС).

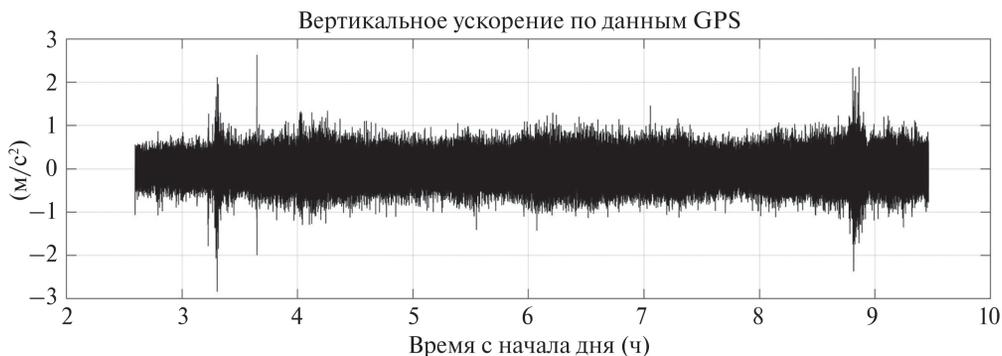


Рис. 4. Вертикальные ускорения от времени полета, вычисленные по фазовым измерениям ГНСС,  $\text{м/с}^2$ .

приемников ГНСС (GPS) производства JAVAD (на частоте 10 Гц). Предварительные этапы постобработки первичных данных были выполнены при помощи алгоритмов методики, разработанной на Механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова [2] (программные пакеты *INS-GNSS* и *IMU-GRAV* [20, 21]). А именно, решены задачи спутниковой навигации (в фазо-дифференциальном режиме) и интегрированной инерциально-спутниковой навигации, в ходе решения которых вычислены:

- 1) широта, долгота, высота над референц-эллипсоидом бортового приемника;
- 2) восточная, северная и вертикальная проекции скорости бортового приемника;
- 3) восточная, северная и вертикальная проекции ускорения бортового приемника;
- 4) оценки углов ориентации (курс, крен, тангаж) БИНС аэрогравиметра;
- 5) оценки инструментальных погрешностей инерциальных датчиков.

График вертикальных ускорений ГНСС, вычисленных по фазовым измерениям приемников [10], представлен на рис. 4.

Оценка аномалии силы тяжести на траектории полета была посчитана при помощи предложенного в работе алгоритма на основе уточненной модели погрешности ускорений ГНСС. Точность оценивания аномалии определялась по сходимости на десяти повторных галсах и составила 0,706 мГал (СКО). Графики оценок аномалии на галсах представлены на рис. 5.

Оценка аномалии также была посчитана при помощи стандартного подхода, основанного на упрощенной модели погрешности ускорений ГНСС в виде белого шума. Для аномалии, остаточных угловых ошибок  $k_E$ ,  $k_N$  и шумов измерений акселерометров  $\mathbf{q}_f$  в (9) были приняты те же модели, как и при построении нового алгоритма. Алгоритм оценивания в стандартном подходе – фильтр Калмана со сглаживанием. Как было показано выше, передаточная функция гравиметрического фильтра в стандартном подходе приближенно соответствует сглаживателю Баттерворта 2-го порядка (рис. 2,а).

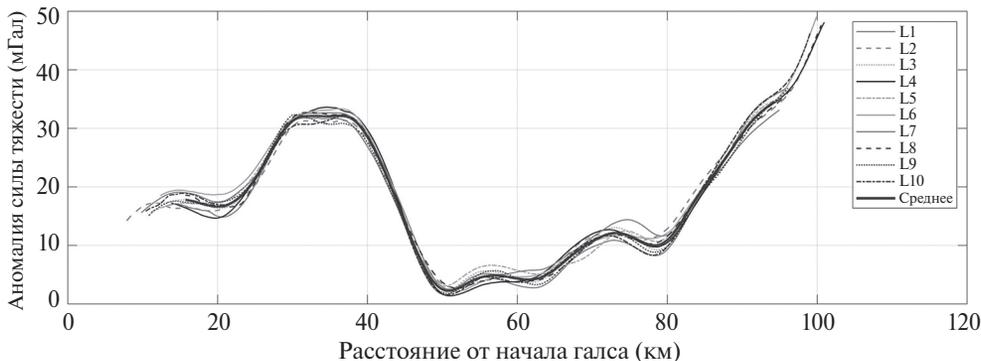


Рис. 5. Оценки аномалии силы тяжести на повторных галсах, полученные при помощи нового алгоритма на основе уточненной модели погрешности ускорений ГНСС, мГал.

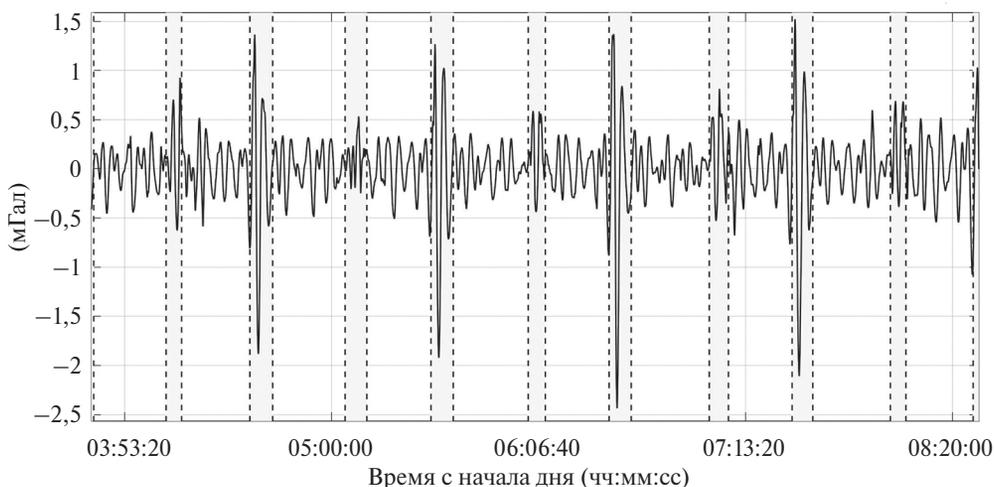


Рис. 6. Разность оценок аномалий на траектории полета, посчитанных при помощи алгоритмов в новом и стандартном подходах, мГал.

Сходимость оценок аномалии по десяти повторным галсам при обработке алгоритмом в стандартном подходе составила 0,749 мГал (СКО), что показывает худшую повторяемость оценок по сравнению с результатами обработки новым алгоритмом (на основе уточненной модели погрешности ускорений ГНСС).

На рис. 6 представлена разность оценок аномалий, посчитанных алгоритмами в новом и стандартном подходах. СКО разности – 0,764 мГал, что довольно существенно. Различия следует отнести к ошибкам оценивания алгоритмом в стандартном подходе, который показал худшую повторяемость оценок аномалии на повторных галсах.

По абсолютной величине разность оценок аномалий достигает 2,5 мГал, и ее максимумы приходятся на участки разворотов (длительностью от 5 до 8 мин) самолета при заходе с одного галса на другой (заметны в виде всплесков на рис. 6). Это может быть объяснено, возможно, тем, что на участках разворотов погрешности ускорений ГНСС имеют более широкий частотный диапазон и эффективнее подавляются новым гравиметрическим фильтром, имеющим более крутой наклон в районе частоты среза (рис. 2,а).

## 5. Заключение

Предложен алгоритм оценивания аномалии силы тяжести на основе уточненной модели погрешности ускорений летательного аппарата, вычисленных по первичным (фазовым) измерениям ГНСС. Уточненная модель учитывает специфику метода вычисления ускорений и задается формирующим уравнением во времени в виде второй центральной разности дискретного белого шума. Проведено сравнение предложенного алгоритма со стандартным, использующим упрощенную модель погрешности ускорений ГНСС (белый шум), путем обработки измерений аэрогравиметрической съемки. Показано, что новый алгоритм позволяет заметно повысить точность оценивания аномалии: по результатам обработки новым алгоритмом достигнута точность 0,71 мГал (СКО), стандартным алгоритмом – 0,75 мГал. Разность оценок аномалий двумя алгоритмами достигает 2,5 мГал и отнесена к ошибкам оценивания стандартным алгоритмом. Представляется, что разработанный алгоритм может быть востребован в программных комплексах постобработки измерений современных бескарданных аэрогравиметров.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Современные методы и средства* измерения параметров гравитационного поля Земли. Под ред. В.Г. Пешехонова, О.А. Степанова. СПб.: АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. 390 с.
2. Голован А.А., Вязьмин В.С. Методика проведения аэрогравиметрических съемок и обработки первичных данных бескарданного аэрогравиметра // Гироскопия и навигация. 2023. Т. 31. С. 58–75.
3. Ayres-Sampaio D., Deurloo R., Bos M., et al. A comparison between three IMUs for strapdown airborne gravimetry // Surv. Geophys. 2015. V. 36. P. 571–586.
4. Болотин Ю.В., Голован А.А. О методах инерциальной гравиметрии // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. 2013. Т. 5. С. 59–67.
5. Lu B., Barthelmes F., Petrovic S., et al. Airborne gravimetry of GEOHALO mission: data processing and gravity field modeling // J. Geoph. Res. 2017. V. 122. P. 586–604.
6. Li M., Xu T., Lu B., et al. Multi-GNSS precise orbit positioning for airborne gravimetry over Antarctica // GPS Solutions. 2019. V. 23. P. 1–14.
7. He K., Xu T., Forste C., et al. Integrated GNSS Doppler velocity determination for GEOHALO airborne gravimetry // GPS Solutions. 2021. V. 25. P. 1–12.

8. *Jekeli C., Garcia R.* GPS phase accelerations for moving-base vector gravimetry // *J. Geod.* 1997. V. 71. P. 630–639.
9. *Bruton A., Schwarz K., Ferguson S., et al.* Deriving acceleration from DGPS: toward higher resolution applications of airborne gravimetry // *GPS Solutions.* 2002. V. 5. P. 1–14.
10. *Вавилова Н.Б., Голован А.А.* Определение ускорения объекта при помощи первичных измерений спутниковой навигационной системы // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех.* 2003. Т. 5. С. 18–25.
11. *Торге В.* Гравиметрия. М.: Мир. 1999. 428 с.
12. *Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А.* Математические основы инерциальных навигационных систем. М.: Изд-во МГУ, 2020. 164 с.
13. *Forsberg R.* A new covariance model for inertial gravimetry and gradiometry // *J. Geophys. Res.* 1987. V. 92. P. 1305–1310.
14. *Jekeli C.* Airborne vector gravimetry using precise, position-aided inertial measurement units // *Bulletin Geodesique.* 1994. V. 69. P. 1–11.
15. *Becker D.* Advanced calibration methods for strapdown airborne gravimetry // Ph.D. Thesis. Technische Universitat Darmstadt. Darmstadt, Germany. 2016.
16. *Степанов О.А., Кошаев Д.А., Моторин А.В.* Идентификация параметров модели аномалии в задаче авиационной гравиметрии методами нелинейной фильтрации // *Гироскопия и навигация.* 2015. Т. 90. С. 95–101.
17. *Vyazmin V.S.* New algorithm for gravity vector estimation from airborne data using spherical scaling functions // *International Association of Geodesy Symposia.* Heidelberg, Germany. Springer-Verlag. 2020. P. 1–7.
18. *Vyazmin V.S., Bolotin Y.V., Smirnov A.O.* Improving gravity estimation accuracy for the GT-2A airborne gravimeter using spline-based gravity models // *International Association of Geodesy Symposia.* Heidelberg, Germany. Springer-Verlag. 2020. P. 1–8.
19. *Kailath T., Sayed A. H., Hassibi B.* Linear estimation, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 2000.
20. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023668582 Российская Федерация. Программа расчёта интегрированного навигационного решения по данным бескарданной аэрогравиметрии. Заявка № 2023667701, регистрация 22.08.2023, опублик. 30.08.2023 / В.С. Вязьмин, А.А. Голован. 1 с.
21. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024680457 Российская Федерация. Программа для расчёта оценки гравитационной аномалии на основе инерциальных и спутниковых данных бескарданной (бесплатформенной) аэрогравиметрии. Заявка № 2024668583, регистрация 08.08.2024, опублик. 29.08.2024 / В.С. Вязьмин. 1 с.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галеевым.*

Поступила в редакцию 30.12.2024

После доработки 19.02.2025

Принята к публикации 28.03.2025